***Лекция 12***

**Вынужденные колебания без сопротивления.**

Как мы выяснили, консервативная система без сопротивления сохраняет полную энергию и совершает незатухающие колебания. Если учесть влияние среды (вязкое сопротивления), то колебания либо отсутствуют, либо затухают, а полная энергия системы убывает, переходя в среду.

Энергия может и поступать в систему из среды. Пусть действие среды на систему выражается периодической обобщенной силой. Как известно, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

Здесь амплитуда i-oй гармоники, – вынуждающая частота этой гармоники, – начальная фаза этой гармоники.

Уравнение Лагранжа такой системы: (5).

Подставив квадратичные формы Т и П

,

получим неоднородное дифференциальное уравнение

Его решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения.

Частное решение будет иметь вид правой част, т.е представлять из себя сумму одинаковых по виду решений (гармоник). Поэтому, нам достаточно рассмотреть обобщенную силу в виде только одной из гармоник

)

Получим ***дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления***

Решение складывается из общего решения однородного уравнения

и частного решения, которое будем искать в виде правой части

А – амплитуда частного решения, Найдем А и ε.

Подставляя в уравнение, после сокращения на Sin, получаем

Частное решение имеет вид

Теперь полное решение приобретает вид

Найдем С1, С2 из начальных условий:

Откуда

Подставив и в решение, найдем закон движения

Видим, что движение системы состоит из трех колебаний. Первым стоит колебание с собственной частотой k и амплитудой, зависящей от начальных условий, вторым – колебание с собственной частотой k и амплитудой, не зависящей от начальных условий, и третьим – собственно-вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы p и амплитудой, не зависящей от начальных условий.

**Биения и резонанс при отсутствии сопротивления.**

Как возникает вынуждающая сила? Ее можно создать, поставив электромотор с неуравновешенной массой на упругую балку (Рис.1). Вынуждающей частотой p является угловая скорость вращения электромотора. При ω = 0 мотор колеблется на балке с собственной частотой k. Если включить мотор, то при ω → k амплитуда А возрастает, стремясь к бесконечности.

ω =p

Рис.1

Выясним, как ведет себя при этом система. Для простоты положим начальные условия нулевыми. Тогда p/k ~ 1 и решение приобретет вид:

Видим, что при p → k амплитуда вынужденных колебаний становится периодической функцией малой частоты Такое движение называется ***биениями***. Биения можно слышать в моторном самолете, когда частота вращения мотора приближается к собственной частоте какой-то детали фюзеляжа.

***Резонанс***

Найденное ранее частное решение теряет смысл при p = k, поскольку его амплитуда

стремится к бесконечности. Явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний А при определенных значениях вынуждающей частоты р называется ***резонансом.*** Выясним, как изменяется амплитуда во времени при p = k.

Попробуем найти частное решение в виде

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, с учетом p = k получим

и частное решение

Итак, если двигатель на балке сразу запустить с угловой скоростью p = k , то амплитуда вынужденных колебаний (и деформация балки) будет линейно возрастать во времени. При достижении деформаций предельных значений, балка сломается.

Построим зависимость амплитуды А собственно вынужденных колебаний от вынуждающей частоты p. Для построения качественных зависимостей принято переходить к безразмерным величинам. Вместо амплитуды А рассмотрим ее отношение к «статическому отклонению»

z = 1

z

=1

Рис. 2

которое называется ***коэффициентом динамичности.***

Здесь

– безразмерная вынуждающая частота, называемая ***коэффициентом настройки*** (вынуждающей частоты на собственную частоту).

При z = 0 , при z → → . График приобретает вид

Чтобы избежать опасности разрушения системы, следует избегать работы вблизи резонанса

z = 1.

**Зависимость сдвига фазы ε (z)**

Сдвигом фазы ε называют разность между фазой вынуждающей силы (pt+δ) и фазой частного решения. Найдем ε при различных значениях z.

Частное решение Сдвиг фаз

При z < 1 (p<k): ε = 0

При z = 1 (p=k): ε =

При z > 1 (p>k): ε =

Теперь можем изобразить график зависимости ε (z) (Рис.3).

Сдвиг фаз можно наблюдать, раскачивая «раскидай»- мячик на резинке. Если частота движений руки меньше собственной частоты колебаний раскидая, то шарик движется в одной фазе (синфазно) с рукой (Рис 4, а). При большой частоте движений руки шарик движется «в противофазе» с рукой (Рис 4, б).

ε

z

1

0

Рис. 3

Рис.4

а

б